جامعة دمشق — **امتحان رياضيات/2/** — **الدورة التكميلية**

كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية — **هندسة التصميم الميكانيكي** — **2014/2015**

---

(1) (10 درجات) **احسب التكاملين الآتيين:**

a) $\int \frac{1}{3} x^3 \sqrt{9-x^2}\, dx$ b) $\int \sin^2 3x \cos 3x\, dx$

(2) (10 درجات) **احسب طول منحني الكاردوئيد Cardioid المعطى بالمعادلة** $r = f(\theta) = 2 - 2\cos\theta$ **والمحدود بين النقطتين** $\theta = 0$ **و** $\theta = 2\pi$

(3) (15 درجة) **ليكن** $T(x,y,z) = 20 + 2x + 2y + z^2$ **تابعاً يمثل درجة الحرارة في كل نقطة على سطح الكرة** $x^2 + y^2 + z^2 = 11$ **، استخدم نظرية مضاريب لاغرانج Lagrange multipliers لتحديد القيم القصوى لدرجة الحرارة على المنحني الناتج من تقاطع الكرة مع المستوي** $x + y + z = 3$

(4) (15 درجة) **أوجد الحل العام للمعادلتين التفاضليتين التاليتين:**

a) $(x^2 - y^2)\, dx + 3\, x\, y\, dy = 0$

b) $y' + x\, y = x\, e^{-x^2}\, y^{-3}$

(5) (10 درجات) **لدى سقوط جسم كتلته** m **من طائرة، تعطى معادلة الحركة كمعادلة تفاضلية على النحو التالي:**

$$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m} v = g$$

حيث أن k **ثابت الاحتكاك و** g **ثابت الجاذبية الأرضية، والمطلوب أوجد سرعة الجسم** v **بدلالة الزمن** t **مع العلم مسبقاً أن مقاومة الهواء تتناسب طرداً مع سرعة الجسم.**

(6) (10 درجات) **لتكن معادلة ريكاتي Ricatti equation معطاة بالشكل** $y' + 2t\, y = 1 + t^2 + y^2$ **والمطلوب:**

a) **بيّن أن** $y_1(t) = t$ **هو حل لمعادلة ريكاتي**

b) **بفرض أن** $y(t) = t + (1/v(t))$ **، وضح بأنه عندئذٍ يمكن كتابة معادلة ريكاتي كمعادلة تفاضلية خطية من المرتبة الأولى بالنسبة للمتحول** v

مع أطيب الأمنيات بالتوفيق والنجاح

مدرس المقرر: د. اسماعيل ادريس

السؤال الأول: a) لإزالة الجذر يمكن أن نفرض $x=3\sin\theta$ أو $u=9-x^2$ ، لنأخذ هنا الفرض المعطى بدلالة التابع المثلثي، مع العلم أن الفرض الآخر يمكن أن يكون أسهل.

$$\int \frac{1}{3} x^3 \sqrt{9-x^2}\,.dx = \int 81 .\sin^3\theta .\cos^2\theta .d\theta \;;\; (x=3\sin\theta,\ dx=3\cos\theta .d\theta)$$

$$= \int 81(1-\cos^2\theta)\sin\theta .\cos^2\theta .d\theta \;;\; (u=\cos\theta,\ du=-\sin\theta .d\theta)$$

$$= \int 81(u^4-u^2).du$$

$$= \frac{81 .\cos^5\theta}{5} - 27\cos^3\theta + C \;;\; \left(\cos\theta = \frac{1}{3}\sqrt{9-x^2}\right)$$

$$= \frac{(9-x^2)^{5/2}}{15} - (9-x^2)^{3/2} + C$$

---

b) لدينا $\int \sin^2 3x .\cos x .dx$ ، بما أن $\sin^2 3x = (\sin 3x)^2$ ، يمكن أن نفرض $u=\sin 3x$

وعندئذٍ: $du = (\cos 3x)(3).dx \Leftarrow$ ، $\frac{du}{3} = \cos 3x .dx$ ، والآن

بالتعويض نجد:

$$\int \sin^2 3x .\cos 3x .dx = \int u^2 .\frac{du}{3}$$

$$= \frac{1}{3}\int u^2 .du$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{u^3}{3}\right) + C$$

$$= \frac{1}{9}\sin^3 3x + C$$

السؤال الثاني: بما أن $f'(\theta)=2\sin\theta$ ، عندئذٍ يمكن أن نجد طول... كما يلي:

$$S=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{[f(\theta)]^2+[f'(\theta)]^2}\cdot d\theta$$

$$=\int_{0}^{2\pi}\sqrt{(2-2\cos\theta)^2+(2\sin\theta)^2}\,.\,d\theta$$

$$=2\sqrt{2}\int_{0}^{2\pi}\sqrt{1-\cos\theta}\,.\,d\theta$$

$$=2\sqrt{2}\int_{0}^{2\pi}\sqrt{2\sin^2\frac{\theta}{2}}\,.\,d\theta$$

$$=4\int_{0}^{2\pi}\sin\frac{\theta}{2}\,.\,d\theta$$

$$=8\left[-\cos\frac{\theta}{2}\right]_{0}^{2\pi}$$

$$=8(1+1)$$

$$=16$$

الثالث: لدينا هنا شرطين هما: $g(x,y,z)=x^2+y^2+z^2=11$ و $h(x,y,z)=x+y+z=3$

والآن بالنظر إلى أن

$$\nabla T(x,y,z)=2\vec{i}+2\vec{j}+2z\vec{k}$$

$$\lambda\cdot\nabla g(x,y,z)=2\lambda x\vec{i}+2\lambda y\vec{j}+2\lambda z\vec{k}$$

$$\mu\cdot\nabla h(x,y,z)=\mu\vec{i}+\mu\vec{j}+\mu\vec{k}$$

يمكن عندئذ كتابة جملة المعادلات الآتية:

① $2=2\lambda x+\mu \leftarrow \frac{\partial T(x,y,z)}{\partial x}=\lambda\frac{\partial g(x,y,z)}{\partial x}+\mu\frac{\partial h(x,y,z)}{\partial x}$

② $2=2\lambda y+\mu \leftarrow \frac{\partial T(x,y,z)}{\partial y}=\lambda\frac{\partial g(x,y,z)}{\partial y}+\mu\frac{\partial h(x,y,z)}{\partial y}$

③ $2z=2\lambda z+\mu \leftarrow \frac{\partial T(x,y,z)}{\partial z}=\lambda\frac{\partial g(x,y,z)}{\partial z}+\mu\frac{\partial h(x,y,z)}{\partial z}$

④ $x^2+y^2+z^2=11$ الشرط الأول

⑤ $x+y+z=3$ الشرط الثاني

بطرح المعادلة ② و المعادلة ③ من المعادلة ①، نحصل على:

$$\lambda(x-y)=0$$

$$2z(1-\lambda)-\mu=0$$

$$x^2+y^2+z^2=0$$

$$x+y+z=0$$

من المعادلة الأولى نستنتج إما $\lambda=0$ أو $x=y$. ففي حال $\lambda=0$، عندئذ يمكن أن نوضح بالحل أن النقاط الحرجة هي: $(3,-1,1)$ و $(-1,3,1)$

أما في حال $\lambda\neq 0$، عندئذ $x=y$، وهنا بالتعويض بالمعادلات السابقة ينتج عندئذ $x=y=(3\pm 2\sqrt{3})/3$ و $z=(3\mp 4\sqrt{3})/3$ هي النقاط الحرجة الموافقة.

وأخيراً، لتحديد القيم القصوى، نقارن درجات الحرارة عند النقاط الحرجة الأربعة التي حصلنا عليها، فنجد

$$T(3,-1,1)=T(-1,3,1)=25$$

$$T\left(\frac{3-2\sqrt{3}}{3},\frac{3-2\sqrt{3}}{3},\frac{3+4\sqrt{3}}{3}\right)=T\left(\frac{3+2\sqrt{3}}{3},\frac{3+2\sqrt{3}}{3},\frac{3-4\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{91}{3}\approx 30.33$$

وعليه، فإن درجة الحرارة الصغرى هي $T=25$ و درجة الحرارة العظمى هي $T=\frac{91}{3}$ على المنحني الناتج من تقاطع الكرة مع المستوي.

السؤال الرابع: a) بما أن (x^2-y^2) و $3xy$ متجانسان وهما من الدرجة الثانية، عند
نفرض $y=vx$ ، فنجد $dy=x\cdot dv+v\cdot dx$ ، وبالتعويض الآن نحصل على:

$$(x^2-v^2x^2)\,dx+3x(vx)\overbrace{(x\cdot dv+v\cdot dx)}^{dy}=0$$

$$(x^2+2v^2x^2)dx+3x^3v\cdot dv=0$$

$$x^2(1+2v^2)dx+x^2(3vx)\cdot dv=0$$

نقسم على x^2 ومن ثم نفصل المتحولات، فينتج:

$$(1+2v^2)\cdot dx=-3v\cdot x\cdot dv\Rightarrow\int\frac{dx}{x}=\int\frac{-3v}{1+2v^2}\cdot dv$$

$$\ln x=-\frac{3}{4}\ln(1+2v^2)+c_1$$

$$4\ln|x|=-3\ln(1+2v^2)+\ln|C|$$

$$\ln x^4=\ln|C(1+2v^2)^{-3}|$$

$$x^4=C(1+2v^2)^{-3}$$

والآن بالتعويض عن v بقيمتها، فنحصل على الحل العام على النحو التالي:

$$x^4=C\left[1+2\left(\frac{y}{x}\right)^2\right]^{-3}\Rightarrow\left(1+\frac{2y^2}{x^2}\right)x^4=C\Rightarrow(x^2+2y^2)^3=Cx^2$$

b) لدينا هنا $y'+xy=xe^{-x^2}y^{-3}$ معادلة برنولي، حيث $n=-3$ ولهذا نفرض

$$z=y^4\Rightarrow z'=4y^3y'$$

نضرب المعادلة المعطاة بـ $4y^3$ فنجد:

$$4y^3y'+4xy^4=4xe^{-x^2}\Rightarrow z'+4xz=4xe^{-x^2}$$

وهذه معادلة خطية بالنظر للمتحول z، وباستخدام الفرض $P(x)=4x$ ، فينتج

$$\int P(x)\cdot dx=\int 4x\cdot dx=2x^2$$

وهنا يعني أن e^{2x^2} هو عامل تكميل، والآن بضرب المعادلة الخطية بعامل التكميل، فنجد:

$$z'e^{2x^2}+4xz\cdot e^{2x^2}=4xe^{x^2}\Rightarrow\frac{d}{dx}\left[ze^{2x^2}\right]=4xe^{x^2}$$

نكامل الطرفين

$$ze^{2x^2}=\int 4xe^{x^2}\cdot dx=2e^{x^2}+C\Rightarrow z=2e^{-x^2}+Ce^{-2x^2}$$

والآن بالتعويض عن z بقيمتها، فيكون الحل العام

لدينا $\frac{dv}{dt} + \frac{kv}{m} = g$ ، لنفرض الآن $b = \frac{k}{m}$ ، عندئذٍ يمكن

فصل المتحولات ونحصل على :

$$dv = (g - bv)\,dt$$

$$\int \frac{dv}{g - bv} = \int dt \Rightarrow -\frac{1}{b}\ln|g - bv| = t + C_1$$

$$\ln|g - bv| = -bt - bC_1$$

$$g - bv = C e^{-bt}$$

وبما أن الجسم يسقط سقوطاً حراً ، فإن $v = 0$ عندما $t = 0$ ، وهكذا $g = C$

وعليه فإن

$$-bv = -g + g e^{-bt} \Rightarrow v = \frac{g - g e^{-bt}}{b} = \frac{mg}{k}\left(1 - e^{-kt/m}\right)$$

السؤال السادس a) لبيان أن $y_1(t) = t$ هو حل لمعادلة ريكاتي ، نشتق فنجد $y_1'(t) = 1$ ، ومن ثم نعوض في المعادلة المعطاة ، فنستنتج :

$$y_1' + 2t\,y_1 = 1 + 2t^2$$

$$1 + t^2 + y_1^2 = 1 + t^2 + t^2 = 1 + 2t^2$$

$\Leftarrow$ الطرف الأيمن = الطرف الأيسر

إذاً $t = y_1(t)$ حلاً للمعادلة التفاضلية .

b) لدينا $y(t) = t + \frac{1}{v(t)} \Rightarrow y' = 1 - \frac{1}{v^2}\cdot v'$ ، نعوض في المعادلة المعطاة فيكون

$$1 - \frac{1}{v^2}\cdot v' + 2t\left(t + \frac{1}{v}\right) = 1 + t^2 + \left(t + \frac{1}{v}\right)^2$$

بالإصلاح ، فنستنتج

$$v'(t) = -1$$

وهي معادلة تفاضلية من المرتبة الأولى بالنسبة للمتحول v